Développement asymptotique de suites définies par récurrence

Théorème : Soit $c > 0$ et $f : [0, c] \to [0, c]$ continue et qui admet un développement limité en 0 de la forme

$$f(x) = x - ax^\alpha + \varepsilon(x),$$

où $a > 0$, $\alpha > 1$ et $\varepsilon(x) = o(x^\alpha)$. Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \leq \delta$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = x$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ admet le développement asymptotique suivant en $+\infty$

$$u_n \sim (na(\alpha-1))^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Application : Si $f = \sin$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 \in [0, 2\pi]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, on a l'équivalent en $+\infty$

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$$

Exemple d'une suite qui diverge : On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$. Alors on a en $+\infty$

$$u_n = n + \frac{\ln(n)}{2n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

Preuve du théorème : Commençons par remarquer que le DL de f implique que $f(0) = 0$. De plus, par définition d'un DL il existe $\delta > 0$ tel que si $|x| \leq \delta$ alors $-ax^\alpha + \varepsilon(x) < 0$. Ainsi pour tout $|x| \leq \delta, 0 \leq f(x) < x$. Donc si $u_0 \in [0, \delta]$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc converge d'après le théorème de la limite monotone. Comme f est continue on sait que la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ doit être un point fixe de f donc vaut nécessairement 0 par ce que l'on vient de montrer.

Pour continuer nous allons essayer de trouver un réel β tel que $(u_{n+1}^\beta - (u_n^\beta)_{n\in\mathbb{N}}$ ait une limite réelle non nulle. Pour cela on manipule un peu le DL de f :

$$\begin{aligned}
f(x)^\beta - x^\beta &= (x - ax^\alpha + \varepsilon(x))^\beta - x^\beta \\
&= x^\beta(1 - ax^{\alpha-1} + o(x^{\alpha-1}))^\beta - x^\beta \\
&= x^\beta(1 - a\beta x^{\alpha-1} + o(x^{\alpha-1})) - x^\beta \\
&= -a\beta x^{\alpha+\beta-1} + o(x^{\alpha+\beta-1}) \\
&\sim -a\beta x^{\alpha+\beta-1}
\end{aligned}$$

En prenant alors $\beta = 1 - \alpha$ il vient $f(x)^\beta - x^\beta \underset{x\to 0}{\to} -a\beta = a(\alpha-1) \neq 0$. En prenant u_0 assez petit (plus petit que le δ déterminé avant) on a le même équivalent pour la suite, d'où

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}^\beta - u_n^\beta = a(\alpha-1).$$

Le théorème de Césaro dit alors que $\dfrac{u_n^\beta - u_0^\beta}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a(\alpha-1)$ ce qui implique, comme $a(\alpha-1)$ est différent de 0, que

$$u_n^\beta \sim na(\alpha-1),$$

ce qui donne le résultat voulu en mettant à la puissance $\dfrac{1}{\beta}$. $\square$

Preuve de l'application : Attention ce n'est pas *stricto sensu* une application directe. En effet, le théorème donne l'existence d'un δ comme il faut sans l'exhiber. Ici on affirme que $[0, \pi/2]$ est stable par sin et que $\sin(x) < x$ pour tout réel dans cet intervalle, ce qui permet au finale de faire le même raisonnement que précédemment car sin admet le DL $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.
Soit donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 \in [0, \pi/2]$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$. Alors avec les notations précédentes on a $a = \dfrac{1}{6}$ et $\alpha = 3$ d'où

$$u_n \sim (n\frac{1}{6}(3-1))^{\frac{1}{1-3}} = \sqrt{\frac{3}{n}}. \square$$

Preuve de l'exemple divergeant : On commence par remarquer que la suite tend vers $+\infty$. Si ce n'était pas le cas, comme elle est clairement croissante (exp étant à valeur positive), elle convergerait vers un point fixe de $x + \exp^{-x}$, qui n'en admet pas, ce serait absurde.
On définit une nouvelle suite $v_n = e^{u_n}$ qui converge aussi vers $+\infty$. On va trouver des équivalents sur v_n pour en déduire sur u_n. On remarque d'abord, en faisant un DL de l'exponentielle, que l'on a

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= e^{u_n + e^{-u_n}} \\
&= v_n e^{1/v_n} \\
&= v_n(1 + \frac{1}{v_n} + \frac{1}{2v_n^2} + o\left(\frac{1}{v_n^2}\right)) \\
&= v_n + 1 + \frac{1}{2v_n} + o\left(\frac{1}{v_n}\right)
\end{aligned}$$

le DL étant valide car $1/v_n$ tend vers 0 en $+\infty$. Ainsi, $v_{n+1} - v_n \sim 1$ donc avec la même utilisation de Césaro que tout à l'heure il vient $v_n \sim n$.
Pour continuer, reprenons notre DL qui s'écrit $v_{n+1} - v_n - 1 \sim \dfrac{1}{2v_n} \sim \dfrac{1}{2n}$. Il vient donc que $v_n - v_1 - n \sim \dfrac{1}{2} H_n$ donc $v_n = n + \dfrac{1}{2}\ln(n) + o(\ln(n))$ où on a enlevé le terme v_1 car tout le reste tend vers $+\infty$ donc il est négligeable pour l'équivalence.
Pour finir on a

$$\begin{aligned}
u_n = \ln(v_n) &= \ln(n(1 + \frac{\ln(n)}{2n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right))) \\
&= \ln(n) + \frac{\ln(n)}{2n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)
\end{aligned}$$

en faisant le DL de $\ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 1.$\square$

Quelques remarques : Je pense qu'il faut :

- bien avoir réfléchi à l'utilisation de Césaro
- réviser ses DL usuels et surtout les règles de composition etc.
- creuser un peu l'exemple avec le sinus car le jury a l'air de bien aimer le pousser. On constate par exemple que le DL que l'on donne ne dépend pas du point de départ, mais il en dépend à partir du 3ème terme !!